SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

SU CERTE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASTRATTE DI TIPO PARABOLICO

11 DICEMBRE 1986

INTRODUZIONE

Questo Seminario è dedicato allo studio della equazione lineare

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t), \quad 0 \le t \le \tau, \\ &M(t)u(t)\big|_{t=0} = w_o, \end{aligned}$$

come tappa preliminare alla considerazione del problema non lineare

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t,u(t)) \;, \; 0 \le t \le \tau,$$

o, più generalmente,

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = g(t,u(t)) \;, \; 0 \le t \le \tau.$$

In (1), $M(t)$, $L(t)$ sono operatori lineari chiusi dallo spazio di Banach (complesso) Y nello spazio di Banach X, f è continua da $[o,\tau]$ in X e $w_o \in X$.

Equazioni del tipo suddetto sono state considerate in [3] in spazi $L^p[o,\tau;X]$, $1<p<+\infty$, e con condizione iniziale $w_o=0$, mediante la riduzione alla forma

$$\text{(2)} \qquad BMu + Lu = h,$$

dove B è l'operatore di derivata rispetto a t in $L^p[o,\tau;X]$, $D(B) = W_o^{1,p}[o,\tau;X] = \{u \;\; L^p[o,\tau;X] : u' \;\; L^p[o,\tau;X] \;, \; u(o) = 0\}$.

Vedremo che, sotto opportune ipotesi, concernenti il risolvente $(zM(t) + L(t))^{-1}$, una teoria analoga può essere sviluppata in spazi di funzioni continue (rispetto a t).

A tale scopo, mostreremo preliminarmente che sotto ipotesi di tipo "spettrale" piuttosto generali, la (2) ha una unica soluzione per ogni h nello spazio di interpolazione reale $(E; D(B))_{\theta,\infty}$, $0<\theta<1$.

Daremo poi condizioni sui dati che permettono di ricondurre la (1) alla forma (2).

1. RISOLUZIONE DI (2) E REGOLARITA' DELLA SOLUZIONE

Siano L,M due operatori lineari chiusi da F in E, E, F spazi di Banach complessi e sia B un operatore lineare chiuso da E in sé. Assumeremo che valgano le ipotesi

H1. B-z ha inverso limitato per ogni z complesso tale che $|\pi - \arg z| \leq \phi < \pi/2$, B è invertibile, ha dominio D(B) chiuso in E e

$$\|(B-z)^{-1};L(E)\| \leq C(1+|z|)^{-1}$$

per ogni z nel settore suddetto.

H2. $D(L) \subseteq D(M)$, L è invertibile, zM+L ha inverso limitato per ogni z con $|\arg z| \leq \pi-\phi+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ e

$$\|L(zM+L)^{-1};\ L(E)\| \leq C_1(1+|z|)^{\alpha},$$

per tali z, dove $0 \leq \alpha < 1$.

Posto $ML^{-1}=T$, la (3) equivale a supporre che z+T ha inverso limitato $z \neq 0$, $|\arg z| \leq \pi-\phi+\varepsilon$,

$$\|(zT+1)^{-1};\ L(E)\| \leq C_1(1+|z|)^{\alpha}.$$

Sia $V = (E;\ D(B))_{\theta,\infty}$, $0<\theta<1$. Poiché vale H_1, V coincide [vedi [4]] come lo spazio di tutti gli $a \in E$ tali che $\{a\} = \sup_{t>0} \|t^{\theta}B(B+t)^{-1}a;E\| < \infty$. Inoltre,

$$\|a\|_{\theta,\infty} = \|a;E\| + \{a\}$$

è una norma equivalente a quella naturalmente definita in $(E;D(B))_{\theta,\infty}$.

Se poi $-B$ genera un semigruppo limitato in E, allora $a \in (E;D(B))_{\theta,\infty}$ se e solo se $a \in E$ e

$$t \to t^{-\theta}\|e^{-tB}a-a;E\|$$

è limitata in $(0,+\infty)$.

Sia Γ la curva nel piano complesso parametrizzata da $z = re^{\pm i\psi}$, $\psi = \pi-\phi+\frac{\varepsilon}{2}$, per $r \geq a_0>0$ e da $z = a_0 e^{iw}$, $|w| \leq \pi-\phi+\varepsilon/2$, dove a_0 è sufficientemente piccolo.

La terza ipotesi, essenziale per i risultati successivi, è allora la seguente:

H3. Si denoti con $[B;(zT+1)^{-1}]$ il commutatore $B(zT+1)^{-1}-(zT+1)^{-1}B$, definito in $D(B)$. Allora $[B;(zT+1)^{-1}]$ ha una estensione limitata da E in sè e da V in sè ed esistono $C''>0$, $0\leq\sigma<1$, tali che

(4) $$\|[B;(zT+1)^{-1}]\ ;\ L(E)\| \leq C''(1+|z|)^{\sigma},$$

(5) $$\|B;(zT+1)^{-1}]\ ;\ L(V)\| \leq C''(1+|z|)^{\sigma}$$

per ogni $z \in \Gamma$.

<u>Osservazione 1.</u> La H3 è soddisfatta se vale (4) e, invece di (5),

$$\|[B;[B;(zT+1)^{-1}]];L(E)\| \leq C_1(1+|z|)^{\sigma}, \quad z \in \Gamma.$$

Infatti, allora

$$B[B;(zT+1)^{-1}] = [B;[B;(zT+1)^{-1}]] + [B;(zT+1)^{-1}]B$$

implica

$$\|[B;(zT+1)^{-1}]u;D(B)\| \le c_1(1+|z|)^{\sigma}(\|u;E\|+\|Bu;E\|);$$

si ottiene il risultato per interpolazione.

Osservazione 2. E' facile riconoscere che c'è una costante $K>0$ tale che per ogni $a \in V$,

$$\|a;E\| + \sup_{z \in \Gamma} \| \,|z|^{\theta} B(B-z)^{-1}a;E\| \le K\|a;V\|.$$

Osservazione 3. Sia $\tilde{B} = B+s$, $s>0$. Allora $(E;D(B))_{\theta,\infty} = (E;D(\tilde{B}))_{\theta,\infty}$, con equivalenza delle norme. Inoltre, se vale H3, allora

$$\|[\tilde{B};(zT+1)^{-1}](\tilde{B}-z)^{-1};\, L(V)\| \le C(1+|z-s|)^{-1}(1+|z|)^{\sigma},\ z\in\Gamma.$$

Ciò premesso, vale il risultato di esistenza e unicità per la soluzione di (2).

Teorema 1. Valgano H1,2,3 e sia $\alpha<\theta<1$. Allora per ogni $h\in V$ e ogni s sufficientemente grande il problema

$$(B+s)\, Mu + Lu = h \tag{6}$$

ha una unica soluzione.

Cenno della dimostrazione

Posto $Lu = v$, (6) viene trasformato nel problema

$$(B+s)Tv + v = h,\ T = ML^{-1}.$$

Se $f\in V$, si pone ($\tilde{B} = B+s$), con Γ orientata dal basso verso l'alto,

$$Sf = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma z^{-1}(zT+1)^{-1} \tilde{B}(\tilde{B}-z)^{-1}f\, dz.$$

Si vede subito che

$$\tilde{B}TSf + Sf = f-(2\pi i)^{-1} \int_\Gamma z^{-1}[B;(zT+1)^{-1}](\tilde{B}-z)^{-1}f=(1-W)f.$$

Poiché

$$\|\int_\Gamma z^{-1}[B;(zT+1)^{-1}](\tilde{B}-z)^{-1}dz;\, L(V)\| \leq C \int_\Gamma |z|^{-1+\sigma}(1+|z+s|)^{-1}d|z|$$

tende a 0 per $s\uparrow\infty$, $1-W$ ha inverso limitato in V e così $S(1-W)^{-1}h$ risolve la (6). L'unicità si dimostra come in [3]. Non è altrettanto semplice far vedere che l'operatore S precedentemente introdotto è continuo da V in sé. Tuttavia, si prova il

<u>Teorema 2.</u> Valgono H1,2,3 e $\alpha<\theta<1$. Allora la soluzione u di (6) soddisfa Lu, $BMu \in (D;D(B))_{\theta-\alpha,\infty}$.

Per la dimostrazione, si utilizza la <u>Osservazione 2</u>, il fatto che B è invertibile e che l'integrale

$$\int_\Gamma t^{\theta-\alpha}|z+t|^{-1}(1+|z|^{\alpha})\ |z|^{-\theta}\ d|z|$$

è limitato (si ricordi che $\theta>\alpha$) come funzione di $t > 0$.

Naturalmente se B e T commutano, nel senso che $[(B-z)^{-1};\ (zT+1)^{-1}] = 0$ per ogni $z\in\Gamma$ ($[B;(zT+1)^{-1}]=0$), si può prendere $s = 0$ in (6) e si ottiene soluzione per la (2).

2. APPLICAZIONE A EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASTRATTE

SIano X,Y spazi di Banach complessi, $L(t)$ e $M(t)$ siano familie di operatori lineari chiusi da Y in X, dove $L(t)$ ha inverso limitato per ogni $t\in[0,\tau]$, $\tau>0$ e $D(L(t))\subseteq D(M(t))$ per ogni t.

Si assume che $t \to M(t)L(t)^{-1} = T(t)$ sia continua da $[0,\tau]$ a $L(X)$ e che $t \to L(t)^{-1}$ sia continua da $[0,\tau]$ in $L(X;Y)$. ($L(X;Y)$ è lo spazio delle applicazioni lineari limitate da X in Y, con la norma usuale, $L(X;X) = L(X)$).

Infine, sia $w_0\in X$ e supponiamo f continua da $[0,\tau]$ in X. Diremo che $u = u(t)$, $t\in[0,\tau]$ è una soluzione stretta del problema

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t)\ , \quad 0\le t\le\tau\ , \\ M(t)u(t)\big|_{t=o} = w_o, \end{cases}$$

se $u\in C[0,\tau;Y]$, $u(t)\in D(L(t))$ $\forall t\in[0,\tau]$, $t \to M(t)u(t)\in C^{(1)}[0,\tau;X]$ e vale (7).

Ora, in virtù delle precedenti ipotesi, (7) equivale a trovare una soluzione stretta del problema [si ponga $L(t)u(t) = v(t)$]:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(T(t)v(t)) + v(t) = f(t),\ t\in[0,\tau], \\ T(t)v(t)\big|_{t=o} = w_o\ . \end{cases}$$

Vedremo di dare condizioni abbastanza semplici su $L(t)$, $M(t)$, $f(t)$, w_o che permettono di applicare i Teoremi 1 e 2.

Posto

$$D(B) = \{u\in C^{(1)}[0,\tau;X]:\ u(0) = u'(0)=0\}\ ,\ Bu = u',$$

prenderemo come spazio E nel Teorema 1 lo spazio $C_0[0,\tau;X]=\{u\in C[0,\tau;X];u(0)=0\}$.

Notiamo subito che allora $(E, D(B))_{\theta,\infty}$, $0<\theta<1$, coincide con lo spa-

zio delle funzioni hölderiane da [o,t] in X, nulle nell'origine, normato da

$$\|u;C_0^\theta[o,\tau;X]\| = \max_{0\le t\le\tau} \|u(t);X\| + \sup_{0\le t,s\le\tau} \frac{\|u(t)-u(s);X\|}{|t-s|^\theta} ,$$

$u\in C_0^\theta[o,\tau;X]$, [vedi [2,4]].

Occorre adesso trasformare (8) in un problema a condizione iniziale nulla. Non utilizzeremo alcuni noti risultati di traccia ; entreremmo in serie difficoltà in quanto è presente l'operatore $M(t) \neq I$, in generale.

Assumiamo quindi $w_0\in R(T(0))$ = immagine di $T(0)$. Inoltre, supponiamo che $t \to T(t)$ sia $C^{(1)}$ da $[0,\tau]$ in $L(X)$ e che $f(0)-(1+T'(0))v_0=T(0)\psi_0$, dove $w_0 = T(0)v_0$.

Posto $\phi(t) = v_0 + t\psi_0$, $v(\cdot)$ soddisfa (8) se

$$\frac{d}{dt}\{T(t)[v(t)-\phi(t)]\} + \frac{d}{dt}(T(t)\phi(t)) + [v(t)-\phi(t)]=f(t)-\phi(t),\ 0\le t\le\tau,$$

$$T(t)[v(t)-\phi(t)]_{|t=o}=0.$$

Posto $w(t) = v(t)-\phi(t)$, tutto è ricondotto a risolvere

$$\frac{t}{dt}(T(t)w(t))+w(t) = f(t)-\phi(t)-T'(t)\phi(t)-T(t)\psi_0,\ t\in[o,\tau],\ T(t)w(t)_{|t=o}=0 \quad (9)$$

Ipotesi che assicurano la validità di H2,3, con $V = C_0^\theta[o,\tau;X]$, possono allora essere

(i) la funzione $t \to T(t)\in C^{(1)}[0,\tau;L(X)]$ ed esistono $C>0$, $0<\theta<1$, $0\le\alpha<1$, $0\le\delta_1,\delta_2<1$ tali che

$$\|L(t)(zM(t)+L(t))^{-1};\ L(X)\| \le C(1+|z|)^\alpha$$

per ogni $z\in C$, $|\arg z|\le \pi/2+\eta_0$, $\eta_0>0$, $0\le t\le\tau$,

(ii) $\|\frac{\partial}{\partial t}(zT(t)+1)^{-1};L(X)\| \leq C(1+|z|)^{\sigma_1}$, $|\arg z| \leq \pi/2 + \eta_0$, $0\leq t\leq\tau$,

(iii) $\|\frac{\partial}{\partial t}(zT(t)+1)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s}(zT(s)+1)^{-1};L(X)\| \leq C(1+|z|)^{\sigma_2}|t-s|^{\theta}$.

Dai Teoremi 1, 2 si deduce

Teorema 3. Sotto le ipotesi (i), (ii), (iii), il problema (7) ha una unica soluzione stretta u per ogni $f\in C^{\theta}[0,\tau;X]$, $\alpha<\theta<1$, e per ogni $w_0\in X$ tali che

$$w_0(=T(0)v_0)\in R(T(0)) \quad e$$

(10)

$$f(0) - v_0 - T'(0)v_0(=T(0)\psi_0)\in R(T(0)).$$

Inoltre, $t\to L(t)u(t)$, $t\to \frac{d}{dt}(M(t)u(t))\in C^{\theta-\alpha}[0,\tau;X]$.

Si noti che

$$T'(t)= -(T(t)+1)\{\frac{\partial}{\partial t}(T(t)+1)^{-1}\}(T(t)+1)$$

e così $\|T(t)-T(s);L(X)\| \leq K|t-s|$ implica che

$$\|T'(t)-T'(s);L(X)\| \leq K'|t-s|^{\theta},\ K,K' > 0.$$

Ciò assicura che $f(t)-\phi(t) - T'(t)\phi(t)-T(t)\psi_0$ definisce un elemento di $C^{\theta}_0[0,\tau;X]$, in forza della condizione di compatibilità (10). E' poi immediato ri_ conoscere che da (i), (ii), (iii) seguono H2,3.

Infine, si può prendere s = 0; basta effettuare, inizialmente, un cambiamento di variabile $u(t) = e^{kt}u_1(t)$, k grande. (9) è quindi risolta, e così lo è (7).

Osservazione 4. Notiamo che se $M(t) \equiv I$, $w_0 = T(0)v_0$ si legge

$w_0 \in D(L(0))$ e $f(0)-(1+T'(0))v_0 \in R(\bar{T}(0))$ diventa
$f(0) - L(0)w_0 - \{\frac{d}{dt}L(t)^{-1}\}_{t=0} L(0)w_0 \in D(L(0))$, una condizione molto vicina e un po' più restrittiva di quella data in [1, p. 45].

Corollario 1. Se $L(t)$, $M(t)$ sono operatori lineari chiusi $\forall t \in \bar{\Delta}-a$, $a > 0$, dove Δ è un intorno complesso di $[o,\tau]$, tali che $T(t) = M(t)L(t)^{-1}$ è olomorfa in $-a+\Delta$, $zM(t)+L(t)$ ha inverso limitato $\forall t \in -a+\bar{\Delta}$ e per ogni $z \in \Sigma$: $|\arg z| \le \omega$, $\pi/2<\omega<\pi$, con

$$\|(zT(t)+1)^{-1};L(X)\| \le \text{Cost},$$

per tutti questi z e t, allora (i), (ii), (iii) sono soddisfatte, con $\alpha=0$, $\theta=1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

Un'altra condizione che consente di utilizzare il Teorema precedente è data da

Corollario 2. Supponiamo che $L(t)$ abbia dominio $D \subseteq X$ indipendente da t, $t \to L(0)L(t)^{-1}$ sia continua da $[0,\tau]$ in $L(X)$, per ogni $f \in D$, esistono le derivate fortemente continue $L'(t)f, L''(t)f$
[e così $\|L^{(k)}(t)L(t)^{-1};L(X)\| \le$ cost., $k = 1,2$].

Esistano poi, per ogni $f \in D$, le derivate fortemente continue $M'(t)f, M''(t)f$, con

$$\max\{\|M^{(k)}(t)f;X\|,\ k=1,2\} \le C\ \|M(t)f;X\|,\ 0\le t\le\tau,$$

$$\|(zT(t)+1)^{-1}M'(t)f;X\| \le C\|(zT(t)+1)^{-1}\ M(t)f;X\|\ ,\ 0\le t\le\tau, z \in \Gamma,\ f \in D.$$

Allora, la condizione (i) con $\alpha=0$ implica (ii) e (iii), con $\delta_1=\delta_2=0$, $\theta=1$.

Osservazione 5. Sia $X = Y$ e sia $M(t)\equiv 1$. Supponiamo, inoltre, che risulti

$$\|(L(t)+z)^{-1};\ L(X)\| \leq C(1+|z|)^{-1}$$

per tutti gli z con $Re z \geq 0$ (e quindi in un settore contenente tale semipiano), e $t \to L(t)^{-1}$ è $C^{(1)}$ da $[0,\tau]$ in $L(X)$, con

$$\|L(t)(z+L(t))^{-1}\ (L(t)^{-1})';L(X)\| \leq C|z|^{-\rho},\ 0<\rho\leq 1.$$

Queste sono le ipotesi di A. Yagi in [5,6]. E' allora facile vedere che

$$\|\frac{\partial}{\partial t}(zL(t)^{-1}+1)^{-1};\ L(X)\| \leq C\ |z|^{1-\rho}$$

D'altra parte, formalmente,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(zL(t)^{-1}+1)^{-1} = 2z^2[(zT(t)+1)^{-1}T'(t)]^2\ (zT(t)+1)^{-1}-$$

$$-z[(zT(t)+1)^{-1}T''(t)]\ (zT(t)+1)^{-1}.$$

Così, se $1/2<\rho\leq 1$, $t \to L(t)^{-1}$ è $C^{(2)}$ da $[0,\tau]$ in $L(X)$, e

$$\|L(t)(z+L(t))^{-1}\ (L(t)^{-1})'';\ L(X)\| \leq C|z|^{-\rho_1},$$

dove $0<\rho_1\leq 1$, il problema (7) ha una unica soluzione stretta per ogni $f\in C^{\theta}[0,\tau;X]$, $0<\theta<1$, e ogni $w_0\in D(L(0))$ per cui

$$f(0) - (1+ [\frac{d}{dt}\ L(t)^{-1}]_{t=0})L(0)w_0\in D(L(0))\ ,$$

[vedi l'Osservazione 4].

<u>Osservazione 6.</u> Sotto opportune ipotesi sui dati, il problema

$$C(t)u'(t) + A(t)u(t) = f(t),\ 0\le t\le \tau,$$
(11)
$$u(0) = u_o,$$

può essere ricondotto ad un problema di tipo (7).

Limitiamoci al caso in cui $A(t)\equiv A$ e $C(t)\equiv C$ sono indipendenti da t, A ha inverso limitato da X a Y, $D(A)\subseteq D(C)$, $\|A(zC+A)^{-1};L(X)\|\le$Cost., Re$z \ge 0$.

Ovviamente, una funzione $u:[0,\tau]\to Y$ è detta essere una soluzione stretta di (11) se $u(t)\in D(A)$ per ogni $t\in[0,\tau]$, $u\in C^{(1)}[o,\tau;Y]$, $t\to Au(t)$, $t\to Cu'(t)$ sono fortemente continue da $[o,\tau]$ in X, con f continua, e vale (11). Ora, la (11) si scrive

$$A^{-1}Cu'(t) + u(t) = A^{-1}f(t),\ 0\le t\le\tau,$$

$$u(0) = u_o.$$

Consideriamo il problema (in D(A))

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}C\,v(t)) + v(t) = A^{-1}f'(t),\ 0\le t\le\tau,$$

$$A^{-1}Cv_{|t=o} = A^{-1}[f(0)-Au_o].$$

E' facile vedere, applicando quello che si è prima ottenuto, che se $f\in C^{1,\theta}[0,\tau;X]$, e $f(0)-Au_o = Cv_o\in R(C)$, $A^{-1}f'(0)-v_o = A^{-1}C\,v_1$, con $v_o,v_1\in D(A)$, cioè $f(0) - Au_o - CA^{-1}f'(0)\in R((CA^{-1})^2)$, allora (11) ha una unica soluzione stretta.

ESEMPI

Esempio 1. Rimandando a [3, pp. 34-40, Examples 1 & 2], la teoria qui sviluppata si applica a problemi del tipo

$$\partial(m(t,x)u(t,x))/\partial t + A(t,x,D)u(t,x) = h(t,x), \ o\le t\le \tau, \quad x\in\Omega$$

$$u(t,x) = 0 \ , \ 0\le t\le\tau, \ x\in\partial\Omega,$$

$$m(t,x)u(x,t)_{|t=0} = w_o(x), \ x\in\Omega,$$

dove $A(t,x,D)$ è definito da

$$A(t,x,D)\ u(x) = \sum_{|\alpha|\le 2r} a_\alpha(t,x)\ D^\alpha u(x),$$

Ω è un dominio aperto limitato di R^n, con frontiera regolare e $m(t,x)$ è una funzione continua e non negativa su $[o,\tau]\times\bar{\Omega}$.

Piccole modifiche alle ipotesi di [3] permettono di ottenere risultati di esistenza e unicità per tali problemi, dove lo spazio $W^{\theta,p}(0,\tau;X)$ va sostituito con $C^\theta[0,\tau;X]$, X essendo uno spazio L^2 con peso, dipendente dalla funzione $m(x,t)$, oppure lo spazio $L^2(\Omega)$.

Esempio 2. Un problema considerato da G. Fichera in [7] è

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (L(x,D)u(t,x)) + L^2(x,D)u(t,x)= f(t,x), \ 0\le t\le\tau, \ x\in\Omega,$$

$$D^p u(t,x) = 0 \ , \ 0\le|p|\le 2m-1, \ t\in[o,\tau], \ x\in\partial\Omega,$$

$$L(x,D)u(0,x) = w_o(x), \ x\in\Omega,$$

dove $$L(x,D) = \sum_{|p|,|q|=o}^{m} D^p\ a_{pq}(x)D^q \ , \ D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}} ,$$

Ω un aperto limitato di R^n, a_{pq} è una matrice sufficientemente regolare, e viene soddisfatta la usuale ipotesi di coercività.

I nostri risultati si applicano a questo problema e a equazioni più generali del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t}(L(x,D)u) + L_1(x,D)u = f,$$

anche in spazi $L^p(\Omega)$, $p \neq 2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ACQUISTAPACE, P., TERRONI, B.: Some existence and regularity results for abstract non-autonomous parabolic equations, Math. Anal. Appl. 99 (1984), 9-64.

[2] DA PRATO, G., GRISVARD, P.: Sommes d'opérateurs linéaires et Equations différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. 54 (1975), 305-387.

[3] FAVINI, A.: Degenerate and singular evolution equations in Banach space, Math. Ann. 273 (1985), 17-44.

[4] GRISVARD, P.: Spazi di tracce e applicazioni, Rend. Matem. 5 (1972), 657-729.

[5] TANABE, H.: Equations of evolution, London: Pitman 1979.

[6] YAGI, A.: On the abstract linear evolution equations in Banach spaces, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 290-303.

[7] FICHERA, G.: On a class of evolution problems, Proced. Royal Soc. Edin. 95 A (1983), 247-256.